BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2007

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА

Р.М.БАБАЕВ, Ф.М.ДЖАВАДОВА
Бакинский Государственный Университет

В работе исследуются свойства некоторого интегрального оператора, являющегося обобщением потенциала Рисса и Бесселя, и условия разрешимости соответствующего интегрального уравнения I рода. Этот оператор представляется в виде произведения двух операторов, имеющих обратный, и строится обратный данному интегральному оператору в различных функциональных пространствах.

Пусть

$$K_{\alpha,\beta}(t)=\frac{1}{|t|^{\alpha}(1+|t|^{2})^{\beta/2}},\quad t\in R^{n}\setminus\{0\},$$

где $0<\alpha<n,\ \beta>0$. Очевидно, что при $\alpha+\beta>n$ функция $K_{\alpha,\beta}$ принадлежит $L_1(R^n)$ и существует обычное обратное преобразование Фурье этой функции. Так как данная функция является радиальной, т.е. зависит только от расстояния аргумента до нуля, то обратное преобразование Фурье данной функции отличается от преобразования Фурье этой функции только на постоянный множитель $\frac{1}{(2\pi)^n}$. При остальных значениях параметров α и β можно найти преобразование Фурье этой функции, как обобщенной функции, определенной на некотором пространстве основных функций. Нам понадобится пространство Лизоркина основных функций:

$$\Psi=\{\psi:\psi\in S(R^n),\ (D^j\psi)(0)=0,\ |j|=0,1...\},$$

$$\Phi=F(\Psi)=\{\varphi:\varphi=\hat{\psi},\psi\in\Psi\},$$

где $S(R^n)$ - пространство шварцевых функций, определенных на R^n, и сходимость в этом пространстве определяется определенным образом (см. [2]). Сходимость в Ψ и Φ вводится так же, как в $S(R^n)$.

Ниже будем рассматривать обобщенные функции над Φ. Напомним, что преобразованием Фурье обобщенной функции f $(f\in\Phi')$ называется функционал $\hat{f}=Ff$, действующий по правилу

$$(\hat{f},\hat{\varphi})=(2\pi)^n(f,\varphi),\ \varphi\in\Phi,$$

а обратное преобразование Фурье по правилу

$$(F^{-1}f, F^{-1}\psi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(f,\psi),\ \psi \in \Psi .$$

Функция $K_{\alpha,\beta}$, как элемент пространства Φ', порождает регулярный функционал

$$(K_{\alpha,\beta},\varphi) = \int_{R^n} K_{\alpha,\beta}(t)\varphi(t)dt .$$

В случае $\frac{n+1}{2} < \alpha + \beta \le n$ преобразование Фурье обобщенной функции $K_{\alpha,\beta}$ из Φ' вычисляется с помощью условно сходящегося интеграла, т.е.

$$\int_{R^n} K_{\alpha,\beta}(x)e^{ixt}dx \overset{def}{=} \lim_{N\to\infty} \int_{|x|\le N} K_{\alpha,\beta}(x)e^{ixt}dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{\rho^{n-1}d\rho}{\rho^{\alpha}(1+\rho^2)^{\beta/2}} \cdot \int_{S_{n-1}} e^{i\rho\sigma t}d\sigma =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(2\pi)^{n/2}}{|t|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^N \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|t|)d\rho}{\rho^{\alpha-\frac{n}{2}}(1+\rho^2)^{\beta/2}} .$$

Так как $|J_\nu(\rho)| \le \frac{C}{\sqrt{\rho}}$ при $\rho \to \infty$, то интеграл сходится условно при $\alpha + \beta > \frac{n+1}{2}$, где S_{n-1} - единичная сфера в R^n, $J_\nu(\rho)$ - функция Бесселя I-го рода.

Таким образом, при $\alpha + \beta > \frac{n+1}{2}$ преобразование Фурье (понимаемое, как условно сходящийся интеграл) радиальной функции $K_{\alpha,\beta}(t)$ существует и является радиальной функцией :

$$\hat{K}_{\alpha,\beta}(t) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|t|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|t|)d\rho}{\rho^{\alpha-\frac{n}{2}}(1+\rho^2)^{\beta/2}} .$$

Тогда, при $\alpha + \beta > \frac{n+1}{2}$

$$F^{-1}(K_{\alpha,\beta})(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|t|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|t|)d\rho}{\rho^{\alpha-\frac{n}{2}}(1+\rho^2)^{\beta/2}} .$$

Известно ([2]), что функция $\frac{1}{|t|^{\alpha}}$ ($0 < \alpha < n$), как элемент Φ', имеет своим прообразом Фурье функцию

$$k_\alpha(t)=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}|t|^{\alpha-n}\quad,$$

где $\gamma_n(\alpha)=2^\alpha\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})$, а функция $\frac{1}{(1+|t|^2)^{\beta/2}}$ $(\beta>0)$, как элемент Φ', своим прообразом Фурье - $G_\beta(t)$ (регулярный функционал), принадлежащий $L_1(R^n)$.

Из ([3]) известна следующая

Теорема. Функция $G_\beta(t)$, $t\in R^n\setminus\{0\}$, бесконечно дифференцируема вне начала координат и допускает ассимптотику:

$$G_\beta(t)\sim\begin{cases}\dfrac{\Gamma((n-\beta)/2)}{2^\beta\pi^{n/2}\Gamma(\beta/2)}|t|^{\beta-n}, & 0<\beta<n,\\ \dfrac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\ln\dfrac{1}{|t|}, & \beta=n,\\ \dfrac{\Gamma((\beta-n)/2)}{2^n\pi^{n/2}\Gamma(\beta/2)}, & \beta>n\end{cases}$$

при $|t|\to 0$ и

$$G_\beta(t)\sim\frac{|t|^{(\beta-n-1)/2}e^{-|t|}}{2^{(n+\beta-1)}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\beta/2)}\quad \text{при } |t|\to\infty .$$

Далее, доказаны следующие теоремы :

Теорема 1. При $0<\alpha<n,\ \beta>0$ функция

$$G_{\alpha,\beta}(t)=\int_{R^n}k_\alpha(t-x)G_\beta(x)dx,\ t\in R^n$$

является прообразом Фурье обобщенной функции $K_{\alpha,\beta}$ (как элемент Φ'), т.е.

$$(FG_{\alpha,\beta},F\varphi)=(K_{\alpha,\beta}\ F\varphi),\ \varphi\in\Phi\ . \tag{1}$$

Доказательство. $G_{\alpha,\beta}(t)$ как потенциал Рисса $(G_\beta\in L_1(R^n))$ конечна п.в. в R^n .Для доказательства (1) достаточно показать, что в Φ'

$$FG_{\alpha,\beta}=FG_\beta\cdot Fk_\alpha\,.$$

Учитывая, что функционал $\frac{1}{|t|^\alpha}$ типа функции является мультипликатором в пространстве Ψ', применив теорему о преобразовании Фурье свертки

([2], стр.179), получаем, что функционал $k_\alpha = F^{-1}(\frac{1}{|t|^\alpha})$ свертыватель в пространстве Φ' и справедлива формула

$$F(k_\alpha * G_\beta) = Fk_\alpha \cdot FG_\beta ,$$

где Fk_α, FG_β - обобщенные функции типа функций $\frac{1}{|t|^\alpha}$ и $\frac{1}{(1+|t|^2)^{\beta/2}}$. Отсюда следует, что $F(k_\alpha * G_\beta)$ - обобщенная функция типа функции

$$F(k_\alpha * G_\beta)(t) = \frac{1}{|t|^\alpha (1+|t|^2)^{\beta/2}} .$$

Теорема доказана.

А теперь рассмотрим операторы

$$(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t) = \int_{R^n} G_{\alpha,\beta}(t-x)\varphi(x)dx ,$$

$$(\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi)(t) = \int_{R^n} k_\alpha(t-x)dx \int_{R^n} G_\beta(x-s)\varphi(s)ds,\ t \in R^n,\ \varphi \in \Phi.$$

Так как операторы

$$(I^\alpha\varphi)(t) = \int_{R^n} k_\alpha(t-x)\varphi(x)dx ,$$

$$(B^\beta\varphi)(t) = \int_{R^n} G_\beta(t-x)\varphi(x)dx,\ t \in R^n$$

отображают пространство Φ на Φ, то $\widetilde{K}_{\alpha,\beta}(\Phi) = \Phi$.

Теорема 2. При $0 < \alpha < n,\ \beta > 0$ и $\varphi \in \Phi$ справедливо тождество

$$K_{\alpha,\beta}\varphi = \widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi .$$

Доказательство. Так как преобразования Фурье функционалов $K_{\alpha,\beta}\varphi$ и $\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi$ типа функций $(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t)$ и $(\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi)(t)$ из Φ' определяются, как преобразование Фурье свертка (см.[2]), то верны равенства:

$$\widehat{K_{\alpha,\beta}\varphi} = \hat{G}_{\alpha,\beta} \cdot \hat{\varphi} = \frac{1}{|t|^\alpha (1+|t|^2)^{\beta/2}} \cdot \hat{\varphi} ,$$

$$\widehat{\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi} = \hat{k}_\alpha \cdot \hat{G}_\beta \cdot \hat{\varphi} = \frac{1}{|t|^\alpha (1+|t|^2)^{\beta/2}} \cdot \hat{\varphi} .$$

Так как функционалы типа функции $K_{\alpha,\beta}\varphi$ и $\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi$ из Φ' равны, то, по известной теореме (см.[3], стр.26), эти функции могут отличаться на алгебраический многочлен. Учитывая, что $(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t)$ и $(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t)$ стремятся к нулю при $|t| \to \infty$, получаем

$$(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t) = (\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi)(t)\,,\ t \in R^n\,.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует:

$$K_{\alpha,\beta}(\Phi) = \Phi\,,$$

т.к. $(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t)$, $t \in R^n$ - непрерывная функция.

Теорема 3. Уравнение

$$(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t) = \psi(t)\,,\ \psi \in \Phi,\ t \in R^n\,,$$

имеет единственное решение и оно имеет вид

$$\varphi(t) = (T^{\beta} D^{\alpha}\psi)(t),\ \ t \in R^n\,,$$

где D^{α} - обратный оператор риссова, а T^{β} - бесселева потенциала (см.[3], [4]).

Доказательство. Справедливость теоремы следует из равенства

$$(K_{\alpha,\beta}\varphi)(t) = (\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi)(t)\,,\ \varphi \in \Phi\,.$$

и из того факта, что $\widetilde{K}_{\alpha,\beta}(\Phi) = \Phi$. Теорема доказана.

Отметим, что $K_{0,\beta} = B^{\beta}$ является бесселевым, а $K_{\alpha,0} = I^{\alpha}$ риссовым потенциалом.

Так как операторы

$I^{\alpha} : L_p(R^n) \to L_{p_\alpha}(R^n)$, и $B^{\beta} : L_p(R^n) \to L_p(R^n)$ ограничены , то

$\widetilde{K}_{\alpha,\beta} : L_p(R^n) \to L_{p_\alpha}(R^n)$ и $\|\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi\|_{p_\alpha} \le C_{\alpha,\beta}\|\varphi\|_p$, где $C_{\alpha,\beta}$ – неотрицательная постоянная , не зависящаяся от функции φ.

Теорема 4. Оператор $K_{\alpha,\beta}$ действует из $L_p(R^n)$ в $L_{p_\alpha}(R^n)$ ограниченно.

Доказательство. Оценим интеграл

$$G_{\alpha,\beta}(t) = \int_{R^n} k_\alpha(t-x) G_\beta(x)dx, \quad t \in R^n\,.$$

Для этой цели оценим интеграл

$$\widetilde{G}_{\alpha,\beta}(t) = \int_{R^n} \frac{G_\beta(x)dx}{|x-t|^{n-\alpha}}, \quad t \in R^n.$$

Имеем :

$$|G_{\alpha,\beta}(t)| \le \frac{C_{\alpha,\beta}}{|t|^{n-\alpha}}, \quad t \in R^n \setminus \{0\},$$

где $C_{\alpha,\beta} > 0$ не зависит от t.

Таким образом, имеем:

$$\left|\left(K_{\alpha,\beta}\varphi\right)(t)\right| \le C_{\alpha,\beta}\int_{R^n}\frac{|\varphi(x)|dx}{|x-t|^{n-\alpha}},\ t\in R^n,$$

откуда , по теореме Соболева об ограниченности потенциала Рисса , следует:

$$K_{\alpha,\beta} : L_p(R^n)\to L_{p_\alpha}(R^n),\ \ 1<p<\frac{n}{\alpha},\ p_\alpha=\frac{np}{n-\alpha p},$$

и

$$\left\|K_{\alpha,\beta}\varphi\right\|_{L_{p_\alpha}(R^n)} \le C'_{\alpha,\beta}\left\|\varphi\right\|_{L_p(R^n)},$$

где $C'_{\alpha,\beta}>0$ не зависит от φ. Теорема доказана.

Следствие. Справедливо равенство:

$$K_{\alpha,\beta}\varphi=\widetilde{K}_{\alpha,\beta}\varphi,\quad \varphi\in L_p(R^n),\quad 1<p<\frac{n}{\alpha}. \qquad (2)$$

Рассмотрим усеченный гиперсингулярный интеграл

$$\left(D^\alpha_\varepsilon f\right)(x)=\frac{1}{d_{\ell,\alpha}}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{\left(\Delta^\ell_t f\right)(x)}{|t|^{n+\alpha}}dt,\quad x\in R^n,\ \varepsilon>0,$$

где $\left(\Delta^\ell_t f\right)(x)=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k C^k_\ell f(x-kt),\ x,\,t\in R^n,\ d_{\ell,\alpha}$ – определенное постоянное число (см.[3]), $\ell>\alpha$.

Скажем, что гиперсингулярный интеграл сходится условно по норме пространства $L_p(R^n)$, если существует предел

$$D^\alpha f=\lim_{\substack{(L_p)\\ \varepsilon\to 0}} D^\alpha_\varepsilon f,$$

т.е. для некоторого $g\in L_p(R^n)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|D^\alpha_\varepsilon f-g\right\|_{L_p(R^n)}=0 \ \text{ и } \ D^\alpha f\overset{def}{=}g.$$

Пусть

$$L^\alpha_{p,r}(R^n)=\left\{f : f\in L_r(R^n),\ D^\alpha f\in L_p(R^n)\right\}.$$

Известно ([3]), что

$$B^\alpha(L_p(R^n))=L^\alpha_p(R^n)\overset{def}{=}L^\alpha_{p,p}(R^n),\qquad I^\alpha(L_p(R^n))=L^\alpha_{p,p_\alpha}(R^n).$$

Из (2) следует:

$$K_{\alpha,\beta}(L_p(R^n))=\left\{f : f\in L_{p_\alpha}(R^n),\ D^\alpha f\in L^\beta_p(R^n)\right\}=$$

$$=\left\{f : f\in L_{p_\alpha}(R^n),\ D^\alpha f\in L_p(R^n),\ D^\beta D^\alpha f\in L_p(R^n)\right\}\overset{def}{=}\mathcal{L}^{\alpha,\beta}_{p,p_\alpha}(R^n).$$

Из вышеуказанного следуют теоремы :

Теорема 5. Для $\varphi\in L_p(R^n),\ 1<p<\dfrac{n}{\alpha}$, справедливо $T^\beta D^\alpha K_{\alpha,\beta}\varphi=\varphi$, где $D^\alpha,\ T^\beta$ - левые обратные, соответственно, потенциалов Рисса и Бесселя ([4]).

Теорема 6. Пусть $f \in L_{p,\,p_\alpha}^{\alpha,\,\beta}(R^n)$. Тогда уравнение $K_{\alpha,\beta}\varphi = f$ разрешимо в $L_p(R^n)$ и $\varphi = T^\beta D^\alpha f$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаев Р.М. Об обращении некоторого интегрального оператора. Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физ.-мат. наук, 2001, №4.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространство основных и обобщенных функций. -М.: Физматгиз, 1958.
3. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. -Изд-во Ростовского ун-та, 1984.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.М. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. -Минск, Изд-во "Наука и техника", 1987.

RİSS POTENSİALININ BİR ÜMUMİLƏŞMƏSİ HAQQINDA

R.M.BABAYEV, F.M.CAVADOVA

XÜLASƏ

İşdə Riss və Bessel potensiallarının ümumiləşməsi olan müəyyən inteqral operatorun xassələri və uyğun I növ inteqral tənliyin həll edilməsi şərtləri tədqiq edilir. Bu operator tərsi olan iкi operatorun hasili кimi ifadə edilir və müxtəlif funкsional fəzalarda verilən inteqral operatorun tərsi qurulur.

ON A GENERALIZATION OF RIESZ POTENTIAL

R.M.BABAYEV, F.M.GAVADOVA

SUMMARY

In this work the properties of some integral operator, which are a generalization of Riesz and Bessel potentials consequently, and the conditions of solvability of corresponding of first time integral equation are studied. This operator is presented as a product of two operators, having inverse, and is constructed the inverse of giving integral operator in different functional spaces.